MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
A. Ribelles, D. Rost

WS 2019/20
Blatt 3
4.11.2019

Tutorium zur Vorlesung „Mathematik im Querschnitt“ -Bearbeitungsvorschlag-

1. a) Die gegebene Funktion

$$f : D \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \frac{1}{x} + \frac{x^3}{3} - \frac{1}{y^2} - \frac{y^2}{16},$$

mit

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0 \text{ und } y \neq 0\}$$

ist, man leicht feststellt, zweimal stetig partiell diffbar mit

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \left(-\frac{1}{x^2} + x^2,\ \frac{2}{y^3} - \frac{y}{8}\right)$$

und

$$\operatorname{Hess} f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{2}{x^3} + 2\,x & 0 \\ 0 & -\frac{6}{y^4} - \frac{1}{8} \end{pmatrix}, \quad (x,y) \in D.$$

Für eine kritische Stelle $(x,y) \in D$ von f gilt $\operatorname{grad} f(x,y) = (0,0)$; wegen

$$\partial_1 f(x,y) = 0 \iff x^2 = \frac{1}{x^2} \iff x^4 = 1 \iff x = \pm 1$$

und

$$\partial_2 f(x,y) = 0 \iff \frac{y}{8} = \frac{2}{y^3} \iff y^4 = 16 \iff y = \pm 2$$

gilt also

$$\operatorname{grad} f(x,y) = (0,0) \quad \iff \quad (x,y) = (1,2),\ \ (1,-2),\ \ (-1,2),\ \ (-1,-2).$$

Demnach kommen als Stellen lokaler Extrema von f nur die vier Punkte

$$(1,2), \qquad (1,-2), \qquad (-1,2), \qquad (-1,-2)$$

in Frage.

Wir untersuchen das Verhalten von f bei den ermittelten kritischen Punkten:

i) Zu $(x,y) = (1,\pm 2)$:
Es gilt

$$\operatorname{Hess} f(1,\pm 2) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

und wegen $\det(\operatorname{Hess} f(1,\pm 2)) = -2 < 0$ besitzt f nach Satz 1.13 an den Stellen $(1,\pm 2)$ **keine** lokalen Extrema [Die Hesse-Matrix ist in diesen Punkten **indefinit**]; f hat in diesen Stellen jeweils einen Sattelpunkt.

ii) Zu $(x, y) = (-1, \pm 2)$:
Es gilt

$$\operatorname{Hess} f(-1, \pm 2) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

und wegen $\det(\operatorname{Hess} f(-1, \pm 2)) = 2 > 0$ und $\partial_1 \partial_1 f(-1, \pm 2) = -4 < 0$ hat f nach Satz 1.13 in $(-1, \pm 2)$ jeweils ein (strenges) lokales **Maximum** [$\operatorname{Hess} f(-1, \pm 2)$ ist **negativ definit**].

Folglich besitzt die Funktion f genau zwei lokale Extrema, nämlich die beiden (strengen) lokalen Maxima in den Punkten $(-1, 2)$ und $(-1, -2)$.

b) Wir betrachten das Verhalten der Funktion f auf der Parallelen zur x-Achse $\{(x, 1) \mid x \in]0, \infty[\}$ im 1. Quadranten für $x \to \infty$, und erhalten

$$f(x, 1) = \frac{1}{x} + \frac{x^3}{3} - \frac{1}{1^2} - \frac{1^2}{16} \underset{x \to \infty}{\longrightarrow} \infty;$$

damit ist f nicht nach oben beschränkt.

2. a) Die gegebene Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) = x^2 + y^2 - e^{xy},$$

ist, wie man leicht feststellt, zweimal stetig partiell diffbar mit

$$\operatorname{grad} f(x, y) = \left(2x - y\, e^{xy}\ ,\ 2y - x\, e^{xy}\right)$$

und

$$\operatorname{Hess} f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 - y^2\, e^{xy} & -(1 + xy)\, e^{xy} \\ -(1 + xy)\, e^{xy} & 2 - x^2\, e^{xy} \end{pmatrix}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Es ist

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} f(x, y) = (0, 0) \quad &\iff \quad 2x - y\, e^{xy} = 0 \quad \wedge \quad 2y - x\, e^{xy} = 0 \\ &\iff \quad 2x = y\, e^{xy} \quad \wedge \quad 2y = x\, e^{xy} \\ &\implies \quad 2x^2 = xy\, e^{xy} \quad \wedge \quad 2y^2 = xy\, e^{xy} \\ &\implies \quad x^2 = y^2 \\ &\implies \quad x = y \quad \vee \quad x = -y. \end{aligned}$$

- Im Fall $x = y$ ergibt sich aus der ersten Gleichung $x \cdot \left(2 - e^{x^2}\right) = 0$, also $x = 0$ oder $e^{x^2} = 2$ und damit $x = \pm\sqrt{\ln 2}$.
- Im Fall $x = -y$ ergibt sich aus der ersten Gleichung $x \cdot \left(2 + e^{-x^2}\right) = 0$, also $x = 0$.

Also ist

$$\operatorname{grad} f(x, y) = (0, 0) \quad \implies \quad (x, y) = (0, 0),\ (\sqrt{\ln 2}, \sqrt{\ln 2}),\ (-\sqrt{\ln 2}, -\sqrt{\ln 2})$$

Durch Einsetzen sieht man auch sofort, daß diese Punkte in der Tat auch Nullstellen des Gradienten von f sind.
Demnach kommen als Stellen lokaler Extrema von f nur die drei Punkte

$$(0, 0), \qquad (\sqrt{\ln 2}, \sqrt{\ln 2}), \qquad (-\sqrt{\ln 2}, -\sqrt{\ln 2})$$

in Frage.

Wir untersuchen das Verhalten von f bei den ermittelten kritischen Punkten:

i) Zu $(x,y) = (0,0)$:

Es gilt $\operatorname{Hess} f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$,

und wegen $\det(\operatorname{Hess} f(0,0)) = 3 > 0$ und $\partial_1\partial_1 f(0,0) = 2 > 0$ hat f nach Satz 1.13 in $(0,0)$ ein (strenges) lokales **Minimum** [Hess $f(0,0)$ ist **positiv definit**].

ii) Zu $(x,y) = (\sqrt{\ln 2}, \sqrt{\ln 2})$, $(-\sqrt{\ln 2}, -\sqrt{\ln 2})$:

Es gilt

$$\operatorname{Hess} f(\pm\sqrt{\ln 2}, \pm\sqrt{\ln 2}) = \begin{pmatrix} 2 - 2\ln 2 & -2\,(1+\ln 2) \\ -2\,(1+\ln 2) & 2 - 2\ln 2 \end{pmatrix},$$

und wegen

$$\det\Big(\operatorname{Hess}(\pm\sqrt{\ln 2}, \pm\sqrt{\ln 2})\Big) = 4\,(1-\ln 2)^2 - 4\,(1+\ln 2)^2 = -16\,\ln 2 < 0$$

besitzt f nach Satz 1.13 an den Stellen $(\sqrt{\ln 2}, \sqrt{\ln 2})$ und $(-\sqrt{\ln 2}, -\sqrt{\ln 2})$ **keine** lokalen Extrema [Die Hesse-Matrix ist in diesen Punkten **indefinit**]; f hat in diesen Stellen jeweils einen Sattelpunkt.

Folglich besitzt die Funktion f genau ein lokales Extremum, nämlich ein (strenges) lokales Minimum im Punkt $(0,0)$.

b) Wir betrachten das Verhalten von f auf der x–Achse $\{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$, und erhalten $f(x,0) = x^2 - 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$; wegen $f(x,0) \to \infty$ für $x \to \infty$ ist f zunächst nicht nach oben beschränkt.

Wir betrachten das Verhalten von f auf der Winkelhalbierenden des 1. Quadranten $\{(t,t) \mid t \in [0,\infty[\} \subset \mathbb{R}^2$, und erhalten $f(t,t) = 2\,t^2 - e^{t^2}$ für alle $t \in [0,\infty[$; wegen

$$f(t,t) = 2t^2 - e^{t^2} = \underbrace{e^{t^2}}_{\to\infty} \cdot \left(\underbrace{\frac{2t^2}{e^{t^2}}}_{\to 0} - 1 \right) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$$

ist f auch nicht nach unten beschränkt. [Dabei erhält man $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{2t^2}{e^{t^2}} = 0$ durch Anwendung des Satzes von De l'Hospital!]

Alternativ hätte man auch das Verhalten der Funktion f auf der Parallelen zur x-Achse $\{(x,1) \mid x \in]0,\infty[\}$ im 1. Quadranten für $x \to \infty$ betrachten können. Auch hier gilt $\lim\limits_{x\to\infty} f(x,1) = -\infty$.

3. a) Die gegebene Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = x^4 + y^4 - 2\,x^2 - 2\,y^2 + 4\,x\,y,$$

ist, wie man sofort sieht, zweimal stetig partiell differenzierbar mit

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \big(4x^3 - 4\,x + 4y\ ,\ 4y^3 - 4\,y + 4x\big)$$

und

$$\operatorname{Hess} f(x,y) = \begin{pmatrix} 12\,x^2 - 4 & 4 \\ 4 & 12\,y^2 - 4 \end{pmatrix}, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Es ist

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} f(x,y) = (0,0) \quad &\iff \quad 4x^3 - 4x + 4y = 0 \quad \wedge \quad 4y^3 - 4y + 4x = 0 \\ &\implies \quad (4x^3 - 4x + 4y) + (4y^3 - 4y + 4x) = 0 \\ &\implies \quad 4(x^3 + y^3) = 0 \\ &\implies \quad x^3 = -y^3 \\ &\implies \quad x = -y. \end{aligned}$$

Im Fall $x = -y$ ergibt sich aus der ersten Gleichung $4x^3 - 8x = 4x(x^2 - 2) = 4x(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2}) = 0$, also $x = 0, \pm\sqrt{2}$.
Also ist

$$\operatorname{grad} f(x,y) = (0,0) \quad \Longrightarrow \quad (x,y) = (0,0),\ (\sqrt{2}, -\sqrt{2}),\ (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$$

Durch Einsetzen sieht man auch sofort, daß diese Punkte in der Tat auch Nullstellen des Gradienten, also kritische Punkte von f sind.
Demnach kommen als Stellen lokaler Extrema von f nur die drei Punkte

$$(0,0), \qquad (\sqrt{2}, -\sqrt{2}), \qquad (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$$

in Frage.

Wir untersuchen das Verhalten von f bei den kritischen Punkten $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ und $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$:

i) <u>Zu $(x,y) = (\sqrt{2}, -\sqrt{2})$:</u>
Es gilt $\operatorname{Hess} f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = \begin{pmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{pmatrix}$,
und wegen $\det\big(\operatorname{Hess} f(\sqrt{2}, -\sqrt{2})\big) = 384 > 0$ und $\partial_1\partial_1 f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = 20 > 0$ hat f nach Satz 1.13 in $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ ein (strenges) lokales **Minimum**
[$\operatorname{Hess} f(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ ist **positiv definit**].

ii) <u>Zu $(x,y) = (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$:</u>
Es gilt $\operatorname{Hess} f(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = \begin{pmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{pmatrix}$,
und wegen $\det\big(\operatorname{Hess} f(-\sqrt{2}, \sqrt{2})\big) = 384 > 0$ und $\partial_1\partial_1 f(-\sqrt{2}, +\sqrt{2}) = 20 > 0$ hat f nach Satz 1.13 in $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ ein (strenges) lokales **Minimum**
[$\operatorname{Hess} f(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ ist **positiv definit**].

b) Wir untersuchen das Verhalten von f bei dem kritischen Punkt $(0,0)$:
Es gilt $\operatorname{Hess} f(0,0) = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$.
Wegen $\det(\operatorname{Hess} f(0,0)) = 0$ kann man (siehe Satz 1.13 c)) zunächst keine Aussage über das Verhalten von f im der Nähe des Punktes $(0,0)$ treffen.
Es ist $f(0,0) = 0$.
Wir untersuchen nun die Funktionswerte $f(x,y)$ auf den beiden Winkelhalbierenden; dabei ist

$$f(t,t) = t^4 + t^4 - 2\,t^2 - 2\,t^2 + 4\,t^2 = 2\,t^4 > 0 = f(0,0)$$

für alle $t \neq 0$ sowie

$$f(t,-t) = t^4 + t^4 - 2\,t^2 - 2\,t^2 - 4\,t^2 = 2\,t^2\left(t^2 - 4\right) < 0 = f(0,0)$$

für alle $0 < |t| < 2$.
Damit liegen in jedem Kreis $K_r(0,0)$ um $(0,0)$ mit Radius $r > 0$ Punkte (x,y) mit $f(x,y) > 0 = f(0,0)$ sowie Punkte (x,y) mit $f(x,y) < 0 = f(0,0)$. Damit hat f in $(0,0)$ **kein** lokales Extremum.

4. Angenommen, es gibt eine solche Funktion f. Dann sind die angegebenen Funktionen

$$\partial_1 f, \partial_2 f \ : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

wiederum partiell diffbar (also f zweimal partiell diffbar) mit

$$\operatorname{Hess} f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_2^2 & 2x_1 \\ 2x_1 x_2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{für alle } (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Man sieht sofort, daß die 2. partiellen Ableitungen

$$\partial_1\partial_1 f, \partial_2\partial_1, \partial_1\partial_2 f, \partial_2\partial_2 f \;: \mathbb{R}^2 \;\longrightarrow\; \mathbb{R}$$

stetig sind, also ist f zweimal stetig partiell diffbar.
Nach dem Satz von Schwarz müßte dann aber Hess $f(x_1, x_2)$ für alle $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ symmetrisch sein, was wegen $2x_1x_2 \neq 2x_1$ für z.B. $(x_1, x_2) = (1, 2)$ nicht der Fall ist.

Also gibt es keine partiell diffbare Funktion f mit

$$\text{grad } f(x_1, x_2) = (x_1 x_2^2 \,,\, x_1^2 + x_2) \qquad \text{für alle } \; (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$